

بهبود برآوردهای آمارگیری نیروی کار با استفاده از چرخشی بودن طرح

مشاور طرح: فرهاد مهران

زهره فلاح محسن خانی

فاطمه هرمندی

شیرین کلچی

آرمان بیدار بخت نیا

گروه پژوهشی طرح های فنی و روش های آماری

پژوهشگاه آماری

بهار ۱۳۸۸

به نام خداوند جان و خرد

پیشگفتار

امروزه آمارگیری نمونه‌ای به صورت گستره برای تولید آمار رسمی کشور مورد استفاده قرار می‌گیرد. معمولاً نمونه‌گیری‌های مهم در فاصله‌های زمانی منظم تکرار می‌شوند. این نمونه‌گیری‌ها تحت عنوان نمونه‌گیری‌های مکرر شناخته می‌شوند. یکی از انواع نمونه‌گیری‌های مکرر که در آمارگیری‌های ملی به کار گرفته می‌شود، نمونه‌گیری چرخشی می‌باشد. روش نمونه‌گیری چرخشی بر اساس چرخش نمونه بین دوره‌ها است. منظور از چرخش نمونه، جایگزین شدن تعدادی از واحدهای نمونه با واحدهای جدید از یک دوره به دوره‌ی دیگر است. چرخشی بودن طرح آمارگیری ذاتاً موجب کم شدن واریانس تغییرات می‌شود ولی اگر از اطلاعات دوره‌های گذشته نیز استفاده شود در برآوردهای سطح نیز کاهش واریانس صورت می‌گیرد که بالتبع باعث کاهش بیش از پیش واریانس برآورد تغییرات نیز می‌گردد.

آمارگیری نیروی کار مرکز آمار ایران که یکی از مهم‌ترین آمارگیری‌های ملی در ایران به شمار می‌رود در انتخاب نمونه از روش نمونه‌گیری چرخشی استفاده می‌نماید. این آمارگیری با هدف دستیابی به شاخص‌های فصلی و سالانه نیروی کار و تغییرات آن در سطح کل کشور و استان‌ها از بهار ۱۳۸۴ اجرا شده است. در حال حاضر برای ارائه برآوردهای سطح تنها از اطلاعات دوره جاری این آمارگیری استفاده می‌شود در صورتی که به دلیل چرخشی بودن نمونه‌ها قابلیت بهبود برآوردهای دوره جاری با استفاده از اطلاعات دوره‌های قبل نیز وجود دارد.

پژوهشکده‌ی آمار با توجه به رسالت خود در زمینه معرفی روش‌های نوین و مناسب آماری، طرح پژوهشی بهبود برآوردهای آمارگیری نیروی کار با استفاده از چرخشی بودن طرح را در دستور کار خود قرار داد. مجموعه‌ی حاضر با هدف معرفی روشی به منظور بهبود برآوردهای آمارگیری نیروی کار که دارای واریانس کمتری نسبت به روش فعلی می‌باشد و کاربرد این روش در ارائه

برآوردهای نیروی کار، گامی است در این راه که امید می‌رود مورد توجه و استفاده مسئولین ذی‌ربط قرار گیرد.

اجرای این طرح با مدیریت سرکار خانم زهره فلاح محسن‌خانی و همکاری سرکار خانم فاطمه هرندی، سرکار خانم شیرین گلچی و جناب آقای آرمان بیداربخت‌نیا انجام شده است که در این جا از یکایک این عزیزان تشکر و قدردانی می‌شود.

مشاور محترم طرح، جناب آقای دکتر فرهاد مهران نیز علاوه بر ارائه راهنمایی‌های بسیار ارزشمند، با انجام بخشی از مراحل اصلی کار، گروه مطالعاتی را بیش از پیش یاری نمودند که بدین وسیله از همکاری صمیمانه ایشان تشکر و قدردانی می‌شود.

در تهیه برنامه‌های رایانه‌ای این طرح، سرکار خانم مریم جوادی همکاری صمیمانه‌ای داشتند، که بدین وسیله از ایشان تشکر و قدردانی می‌شود.

از سرکار خانم مهنوش میرمحمد که زحمت تایپ این گزارش را به عهده داشته و با حوصله فراوان آن را به انجام رساندند نیز بسیار تشکر می‌شود.

از خوانندگان محترم تقاضا می‌شود، نظرات اصلاحی خود در ارتباط با محتوای مجموعه‌ی حاضر را به گروه پژوهشی طرح‌های فنی و روش‌های آماری منعکس نمایند.

گروه پژوهشی طرح‌های فنی و روش‌های آماری

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	مقدمه
۷	فصل اول: مبانی نظری
۱۰	۱-۱ برآورد مستقیم سطح
۱۱	۲-۱ برآورد مستقیم تغییرات
۱۱	۱-۲-۱ برآورد مستقیم تغییرات در نمونه‌های مستقل
۱۱	۲-۲-۱ برآورد مستقیم تغییرات در نمونه‌های مشترک
۱۲	۳-۲-۱ برآورد مستقیم تغییرات در نمونه‌های چرخشی
۱۴	۳-۱ برآورد غیر مستقیم سطح
۱۴	۱-۳-۱ پیش‌رو
۱۵	۲-۳-۱ پس‌رو
۱۷	۴-۱ برآورد مرکب سطح
۱۸	۱-۴-۱ K ی بهینه
۱۹	۲-۴-۱ δ ی بهینه
۲۰	۳-۴-۱ واریانس برآوردگر مرکب سطح
۲۲	۴-۴-۱ بهره حاصل از K و δ های مختلف
۲۲	۱-۴-۴-۱ بهره حاصل از K و δ های بهینه
۲۴	۲-۴-۴-۱ بهره حاصل از K ی بهینه و $\delta = \frac{1}{p}$
۲۶	۵-۱ برآورد مرکب تغییرات
۲۷	۶-۱ برآورد کالیبره مرکب
۳۱	۷-۱ جمع‌بندی

فصل دوم: مروری بر تجربیات کشورها

۳۵	
۳۸	۱-۲ CPS آمریکا
۳۸	۱-۱-۲ تاریخچه‌ای از CPS
۳۹	۲-۱-۲ وزن‌دهی در CPS
۴۲	۳-۱-۲ برآورد مرکب
۴۳	۱-۳-۱-۲ CPS در برآورد مرکب
۴۴	۲-۳-۱-۲ محاسبه وزن‌های مرکب
۴۶	۳-۳-۱-۲ انتخاب ضرایب K و A
۴۸	۲-۲ LFS کانادا
۴۸	۱-۱-۲ تاریخچه‌ای از LFS
۴۹	۲-۲-۲ وزن‌دهی در LFS
۵۱	۳-۲-۲ کالیبره مرکب
۵۳	۴-۲-۲ انتخاب مقدار α
۵۶	۳-۲ LFS استرالیا
۵۶	۱-۳-۲ تاریخچه‌ی LFS
۵۶	۲-۳-۲ وزن‌دهی در LFS
۵۸	۳-۳-۲ برآوردگر وزن‌دهی مرکب BLUEB1
۶۱	۴-۲ آمارگیری نیروی کار ایران
۶۱	۱-۴-۲ تاریخچه آمارگیری نیروی کار ایران
۶۱	۲-۴-۲ روش نمونه‌گیری و مراحل وزن‌دهی آمارگیری نیروی کار
۶۴	۵-۲ مقایسه تطبیقی

فصل سوم: روش پیشنهادی برآورد مرکب آمارگیری نیروی کار ایران

- ۶۵
- ۶۹ ۱-۳ متغیرهای اصلی
- ۶۹ ۱-۱-۳ برآورد مرکب متغیرهای اصلی
- ۷۱ ۲-۱-۳ میزان کاهش واریانس در نتیجه‌ی استفاده از برآورد مرکب
- ۷۲ ۱-۲-۱-۳ مثال عددی
- ۷۳ ۲-۳ سایر متغیرها
- ۷۳ ۱-۲-۳ برآورد مرکب سایر متغیرها
- ۷۵ ۳-۳ ضریب همبستگی متغیرهای دو حالتی
- ۷۶ ۱-۳-۳ مثال عددی
- ۷۹ ۴-۳ مقدار K
- ۷۹ ۱-۴-۳ مثال عددی
- ۸۰ ۵-۳ برآورد واریانس (بر اساس مجموع‌های خوشه‌های نهایی)
- ۸۲ ۱-۵-۳ برآورد واریانس نسبت‌ها
- ۸۳ ۲-۵-۳ برآورد واریانس تفاضل نسبت‌ها
- ۸۴ ۳-۵-۳ مثال عددی
- ۸۴ ۶-۳ برآورد واریانس (با استفاده از اثر طرح)
- ۸۵ ۱-۶-۳ مثال عددی
- ۸۷ ۷-۳ خلاصه مراحل محاسبه برآوردهای مرکب با روش پیشنهادی

فصل چهارم: برآورد مرکب فصل دوم سال ۱۳۸۴ آمارگیری نیروی کار ۸۹

۹۲ ۱-۴ مقادیر ضریب همبستگی و K

۹۳ ۲-۴ برآورد مرکب متغیرهای اصلی

۹۷ ۳-۴ واریانس برآورد مرکب

۹۷ ۱-۳-۴ واریانس برآوردهای مرکب با استفاده از روش ورما

۹۸ ۲-۳-۴ واریانس برآوردهای مرکب با استفاده از روش $Deft^2$

۱۰۰ ۴-۴ بهره‌ی برآوردگر مرکب

۱۰۱ ۵-۴ نتیجه‌گیری

۱۰۳ منابع

۱۰۹ واژه‌نامه

۱۱۵ پیوست‌ها

پیوست ۱: نحوه محاسبه‌ی K ی بهینه برای بیش از ۲ نمونه (۲ تکرار)

۱۱۷ ۲-۲-۲ با الگوی چرخش

پیوست ۲: متغیرهای کمکی مرکب تعریف شده در سطح ایالت برای

۱۲۲ LFS کانادا

پیوست ۳- وزن‌دهی مرکب BLUE B1 استرالیا در دو مرحله‌ی برآورد

۱۲۵ مرکب و وزن‌دهی

۱۲۷ پیوست ۴- برنامه‌های رایانه‌ای

مقدمه

بسیاری از نمونه‌گیری‌های مهم در فاصله‌های زمانی معین تکرار می‌شوند. می‌توان از داده‌هایی که در نمونه‌گیری‌های مکرر از یک جامعه در دوره‌های مختلف زمانی به دست می‌آید، به منظور برآورد پارامترهای مربوط به ویژگی‌های مورد مطالعه برای دوره زمانی جاری، برآورد تغییرات پارامترها از دوره قبل تا دوره زمانی جاری، و برآورد پارامترهایی مانند مجموع کل یا میانگین برای چند دوره زمانی استفاده کرد. در نمونه‌گیری‌های مکرر، بررسی تغییرات از اهمیت خاصی برخوردار است. به منظور بالا بردن دقت برآورد تغییرات بین دوره‌های زمانی مختلف همراه با ارائه برآوردهای مطلوب از دوره زمانی جاری، وجود تداخل بین نمونه‌های دوره‌های مختلف، لازم است. یعنی در هر دوره باید نمونه شامل مجموعه‌ای از واحدهای نمونه‌گیری شده در دوره قبلی و مجموعه‌ای از واحدهایی که در دوره قبل نمونه‌گیری نشده‌اند، باشد. نمونه‌گیری مکرر با این نوع ترکیب نمونه، نمونه‌گیری چرخشی نامیده می‌شود (کوتز و همکاران، ۲۰۰۵).

در نمونه‌گیری چرخشی ممکن است برخی واحدها برای چند دوره زمانی متوالی در نمونه باقی بمانند و یا برخی واحدها پس از خروج موقت از نمونه، دوباره در دوره‌های بعدی وارد نمونه شوند. منظور از چرخش نمونه، جایگزین شدن تعدادی از واحدهای نمونه با واحدهای جدید از یک دوره به دوره دیگر است (فلاح‌محسن‌خانی، ۱۳۸۵).

در نمونه‌گیری‌های مکرر که واحدهای انتخاب شده در هر دوره مستقل از دوره‌های دیگر هستند، برآوردهای سطح تنها بر اساس اطلاعات همان دوره ارائه می‌شوند در صورتی که وجود واحدهای نمونه‌گیری شده در دوره قبلی در نمونه‌گیری چرخشی ارائه برآوردهایی دقیق‌تر با نام برآوردهای مرکب را امکان‌پذیر می‌سازد. به دلیل وجود این واحدها، نتایج حاصل از دوره‌های مختلف دارای همبستگی مثبت می‌باشند. برآورد مرکب با استفاده از این همبستگی‌های مثبت که در طول زمان بین اطلاعات واحدهای یکسان وجود دارد، دقت برآوردها به خصوص برآوردهای تغییرات را بهبود می‌دهد. تئوری این روش آن‌گونه که در آمارگیری‌های ماهانه ایالات متحده به کار می‌رود توسط

وودراف در سال ۱۹۶۳ شرح داده شده که عبارت است از محاسبه‌ی برآوردهای جاری به صورت مجموع موزون دو مؤلفه a و b که a برآوردی است که مستقیماً از دوره جاری به دست آمده است و b برآورد غیر مستقیم دوره جاری است به این ترتیب که برآورد دوره قبل، برای تغییرات مشاهده شده بین دوره قبل و دوره جاری برای واحدهای تکراری که در هر دو دوره اندازه‌گیری شده‌اند، تعدیل شده است. تغییرات مشاهده شده ممکن است به صورت اختلاف مقادیر دو دوره یا به صورت نسبت آن‌ها نشان داده شود. وزن‌های مؤلفه‌ها به اندازه همبستگی‌های دوره به دوره بستگی خواهند داشت. هر چه ضرایب همبستگی بزرگ‌تر باشد، وزن‌های مربوط به مؤلفه b بزرگ‌تر خواهند بود. در آمارگیری نیروی کار متغیرهایی مانند بیکاری، همبستگی‌های دوره به دوره کوچک‌تری نسبت به متغیرهایی مثل اشتغال دارند (مهران، و ورما، ۱۹۹۲).

هدف این پژوهش، مطالعه، بررسی و کاربرد روش‌های بهبود برآوردهای حاصل از آمارگیری نیروی کار به منظور دست یافتن به برآوردهای دقیق‌تر در آمارگیری مزبور می‌باشد. در فصل اول گزارش، مبانی نظری برآوردگر مرکب بیان شده است که شامل برآورد مستقیم سطح و تغییرات، برآورد غیر مستقیم سطح و تغییرات، برآورد مرکب سطح و تغییرات و برآورد کالیبره مرکب سطح و تغییرات می‌باشد.

فصل دوم گزارش در ۵ قسمت تدوین شده است. در سه قسمت اول، ویژگی‌های آمارگیری نیروی کار کشورهای آمریکا، کانادا و استرالیا ارائه شده است به گونه‌ای که بعد از بیان تاریخچه‌ای مختصر از آمارگیری مزبور در این کشورها، مراحل برآورد این آمارگیری‌ها مورد بحث و بررسی قرار گرفته است، در قسمت چهارم مختصری از تاریخچه و روش برآورد در آمارگیری نیروی کار ایران ارائه شده است و در قسمت آخر مشخصه‌های اصلی طرح نمونه‌گیری و خطای نسبی شاخص‌های عمده آمارگیری نیروی کار در چهار کشور آمریکا، کانادا، استرالیا و ایران مقایسه شده است.

فصل سوم گزارش با نگاهی توأم به مبانی نظری و تجربیات کشورهای آمریکا، کانادا و استرالیا روشی برای بهبود برآوردهای آمارگیری نیروی کار ایران ارائه کرده است. همچنین با ارائه واریانس برآوردها، نشان داده شده است که روش معرفی شده برآوردهای کاراتری را ارائه می‌نماید.

در فصل چهارم با استفاده از داده‌های فصل بهار و تابستان آمارگیری نیروی کار سال ۱۳۸۴ و به کمک روش معرفی شده در فصل سوم، برآوردهای بهبود یافته فصل تابستان سال ۱۳۸۴ آمارگیری نیروی کار محاسبه شده است. همچنین میزان دقت این برآوردها نسبت به برآوردهای مستقیم نیز ارائه شده است.

در پایان این فصل نتیجه‌گیری این طرح پژوهشی ارائه شده است.

فصل اول

مبانی نظری

هدف از ارائه‌ی مطالب این فصل علاوه بر آشنا نمودن متخصصان نمونه‌گیری‌های چرخشی با اهم روش‌هایی که برای بهبود برآوردهای آمارگیری‌های چرخشی استفاده می‌شود، آگاه نمودن از نحوه‌ی محاسبه دقت برآوردها می‌باشد. از آن‌جا که در این فصل مبانی نظری برآوردها ارائه شده است، به منظور درک بهتر، مطالب این قسمت با نگاه کتاب درسی تدوین شده است.

فرضیاتی که با توجه به آن‌ها برآوردها مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، به این ترتیب بوده است که در زمان‌های ۱ و ۲ نمونه‌های s_1 و s_2 با اندازه‌ی یکسان از جامعه‌ی ثابت و بسته به روش تصادفی ساده انتخاب می‌شوند، فرض بر این است که در این دو تکرار بی‌پاسخی وجود ندارد.

در این فصل با در نظر گرفتن گزینه‌های مختلف برای انتخاب نمونه‌های یک آمارگیری مکرر با دو تکرار، برآوردهای مستقیم، غیر مستقیم و مرکب ابتدا برای سطح و سپس برای تغییرات ارائه شده است. برآوردهای مستقیم برآوردهای مستقیم است که در آن فقط از اطلاعات یک مقطع استفاده می‌شود. در برآوردهای غیر مستقیم از اطلاعات هر دو مقطع استفاده می‌شود. هدف از ارائه‌ی برآوردهای غیر مستقیم، شناخت بهتر برآوردهای مرکب بوده است زیرا برآوردهای مرکب ترکیبی از برآوردهای مستقیم و غیر مستقیم است. بعد از ارائه‌ی این برآوردها، فرمول واریانس آن‌ها نیز ارائه شده است. در ادامه برآوردهای کالیبره‌ی مرکب که روش عملی دیگری برای تصحیح برآوردهای حاصل از نمونه‌گیری‌های چرخشی است، معرفی و کارایی آن بررسی شده است. در پایان جمع‌بندی این فصل ارائه شده است.

۱-۱ برآورد مستقیم سطح

فرض کنید $U = \{1, \dots, k, \dots, N\}$ مجموعه واحدهای جامعه مورد بررسی است. y_k ، مقدار متغیر مورد بررسی برای k امین واحد جامعه است و t مجموع y_k های جامعه است. از این جامعه با طرح نمونه‌گیری تصادفی ساده، نمونه‌ی احتمالی s با اندازه‌ی n انتخاب می‌شود. به عبارتی $s = \{y_1, \dots, y_n\}$ و $\pi_k = P_r(k \in s) = \frac{n}{N}$ احتمال انتخاب عضو k ام جامعه در نمونه‌ی s می‌باشد. هدف، برآورد t همراه با ارائه‌ی دقت آن می‌باشد.

با توجه به فرمول برآوردگر هورویتز - تامپسون (HT)، برآوردگر مستقیم مجموع y به صورت زیر خواهد بود.

$$\hat{t}^D = \sum_{k \in s} d_k y_k = \sum_{k \in s} \frac{y_k}{\pi_k} = \sum_{k \in s} y_k \cdot \frac{N}{n} = N\bar{y} \quad , \quad d_k = \frac{1}{\pi_k}$$

همچنین واریانس برآوردگر \hat{t}^D وقتی $\text{var}(y) = \sigma^2$ عبارت است از:

$$\text{var}(\hat{t}^D) = \text{var}(N\bar{y}) = N^2 \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{\sigma^2}{n}$$

با فرض کوچک بودن کسر نمونه‌گیری داریم:

$$\text{var}(\hat{t}^D) \approx N^2 \frac{\sigma^2}{n} \quad (1)$$

۲-۱ برآورد مستقیم تغییرات

فرض کنید در دو زمان ۱ و ۲ نمونه‌های s_1 و s_2 با اندازه‌ی یکسان انتخاب شده است. هدف برآورد $(t_2 - t_1)$ به همراه واریانس آن است، از آن‌جا که در یک آمارگیری مکرر با دو تکرار، نمونه‌ها در زمان‌های ۱ و ۲ ممکن است کاملاً مستقل باشند، کاملاً مشترک باشند (داده‌های پانلی) یا قسمتی از آن‌ها مشترک باشد (نمونه‌گیری چرخشی)، با در نظر گرفتن سه گزینه‌ی مذکور برای نمونه‌ها برآوردگر مورد نظر و واریانس آن برای هر گزینه به طور جداگانه ارائه می‌شود.

۱-۲-۱ برآورد مستقیم تغییرات در نمونه‌های مستقل

برآوردگر مستقیم تغییرات در دو نمونه که واحدهای آن‌ها کاملاً مستقل هستند عبارت است از

$$\hat{d}_1 = \hat{t}_2^D - \hat{t}_1^D = N(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)$$

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{d}_1) &= N^2 \text{var}(\bar{y}_2 - \bar{y}_1) = N^2 (\text{var}(\bar{y}_2) + \text{var}(\bar{y}_1)) \\ &= N^2 \left(\left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{\sigma^2}{n} + \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{\sigma^2}{n} \right) = 2N^2 \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

با فرض کوچک بودن کسر نمونه‌گیری، واریانس برآورد مستقیم تغییرات عبارت است از:

$$\text{var}(\hat{d}_1) \approx 2N^2 \frac{\sigma^2}{n} \quad (2)$$

۲-۲-۱ برآورد مستقیم تغییرات در نمونه‌های مشترک

برآوردگر مستقیم تغییرات در دو نمونه که واحدهای آن‌ها کاملاً یکسان هستند به صورت زیر به

دست می‌آید:

$$\hat{d}_1 = \hat{t}_1^D - \hat{t}_1^D = N(\bar{y}_r - \bar{y}_1)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{d}_1) &= \text{Var}(N(\bar{y}_r - \bar{y}_1)) = N^2 \text{Var}(\bar{y}_r - \bar{y}_1) \\ &= N^2 (\text{Var}(\bar{y}_1) + \text{Var}(\bar{y}_r) - 2\text{Cov}(\bar{y}_1, \bar{y}_r)) \\ &= N^2 \left(\left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{\sigma^2}{n} + \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{\sigma^2}{n} - 2\left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{\sigma^2}{n} \rho \right) \\ &= N^2 \left(\left(1 - \frac{n}{N}\right)^2 \sigma^2 \frac{(1-\rho)}{n} \right) \end{aligned}$$

با فرض کوچک بودن کسر نمونه‌گیری، واریانس برآوردگر تغییرات به صورت ذیل به دست

می‌آید:

$$\text{var}(\hat{d}_1) \approx \frac{2N^2 \sigma^2}{n} (1-\rho) \quad (3)$$

۱-۲-۳ برآورد مستقیم تغییرات در نمونه‌های چرخشی

فرض می‌شود δ درصد از واحدهای نمونه‌ی s_r ، عضو نمونه‌ی s_1 نیز بوده‌اند. به عبارتی داریم:

$$\begin{aligned} s_1 &= s_1^\delta \cup s_1^{1-\delta} \\ s_r &= s_r^\delta \cup s_r^{1-\delta} \\ s_1^\delta &= s_r^\delta \end{aligned}$$

بنابراین \hat{t}_1^D و \hat{t}_r^D عبارتند از:

$$\begin{aligned} \hat{t}_1^D &= N\bar{y}_1 = N(\delta\bar{y}_{1\delta} + (1-\delta)\bar{y}_{1(1-\delta)}) \\ \hat{t}_r^D &= N\bar{y}_r = N(\delta\bar{y}_{r\delta} + (1-\delta)\bar{y}_{r(1-\delta)}) \end{aligned}$$

تفاضل دو عبارت \hat{t}_1^D و \hat{t}_r^D ، برآورد مستقیم تغییرات در نمونه‌گیری چرخشی است. به عبارتی:

$$\hat{d}_\delta = (\hat{t}_r^D - \hat{t}_1^D) = N(\delta(\bar{y}_{r\delta} - \bar{y}_{1\delta}) + (1-\delta)(\bar{y}_{r(1-\delta)} - \bar{y}_{1(1-\delta)}))$$

با توجه به روابط ذیل واریانس $\hat{\Delta}_\delta$ نیز به دست می‌آید.